**专题17 圆锥曲线中的一类定点问题**

**一、结论**

**若圆锥曲线中内接直角三角形的直角顶点与圆锥曲线的顶点重合,则斜边所在直线过定点.**

**(1)对于椭圆()上异于右顶点的两动点,,以为直径的圆经过右顶点,则直线过定点.同理,当以为直径的圆过左顶点时,直线过定点.**

**(2)对于双曲线上异于右顶点的两动点,,以为直径的圆经过右顶点,则直线过定点.同理,对于左顶点,则定点为.**

**(3)对于抛物线上异于顶点的两动点,,若,则弦所在直线过点.同理,抛物线上异于顶点的两动点,,若,则直线过定点.**

**二、典型例题**

1．（2022·安徽蚌埠·高二期末）已知直线*l*与抛物线交于不同的两点*A*，*B*，*O*为坐标原点，若直线的斜率之积为，则直线*l*恒过定点（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】

设直线方程为 ，

联立 ，整理得： ，

需满足 ，即 ，

则 ，

由 ，得： ，

所以 ，即 ，

故 ，

所以直线*l*为：，当时，，

即直线*l*恒过定点，

故选：A.

**另解：对于抛物线上异于顶点的两动点,,若,则弦所在直线过点,本题中由于**直线的斜率之积为，所以**，直接使用二级结论，所在直线过点，即**.

**【反思】圆锥曲线过定点问题，是一类重点提醒，在选择填空题中，先判断是否符合可以使用二级结论，在符合的情况下，小题可以直接使用二级结论，解答题可以把二级结论当做工具试探答案，但是不可以直接使用二级结论，如确实要用，需先证后用.**

2．（2021·安徽·合肥市第六中学高三开学考试（文））已知抛物线，和分别为抛物线上的两个动点，若（为坐标原点），弦恒过定点，则抛物线方程为（       ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【详解】

若直线与轴重合，此时直线与抛物线只有一个交点，不合乎题意.

设点、，设直线的方程为，

联立，消去可得，

，所以，，

因为，则，解得.

因此，抛物线的方程为.

故选：B.

**另解：对于抛物线上异于顶点的两动点,,若,则弦所在直线过点,本题中由于**,符合使用条件，由于弦恒过定点，所以.

**【反思】圆锥曲线过定点问题，是一类重点提醒，在选择填空题中，先判断是否符合可以使用二级结论，在符合的情况下，小题可以直接使用二级结论，注意先判断，后使用.**

3．（2022·江苏·高三专题练习）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，第九章“勾股”，讲述了“勾股定理”及一些应用.直角三角形的两直角边与斜边的长分别称“勾”“股”“弦”，且“勾2+股2=弦2”，设直线交抛物线于，两点，若，恰好是 的“勾”“股”（为坐标原点），则此直线恒过定点（       ）

A． B． C． D．

【答案】D

【详解】

设直线的方程为，，，

由 得，

由根与系数的关系可得：，，

若，恰好是 的“勾”“股”（为坐标原点），

可得，所以，即，

所以，

，

所以，

即，解得或（舍）

所以直线的方程为，恒过点，

故选：D

**另解：抛物线上异于顶点的两动点,,若,则直线过定点,本例中，若，恰好是 的“勾”“股”（为坐标原点），**

**可得，所以，即，所以直线过定点，即.**

**【反思】圆锥曲线过定点问题，是一类重点提醒，在选择填空题中，先判断是否符合可以使用二级结论，在符合的情况下，小题可以直接使用二级结论，注意先判断，后使用.**

4．（2020·山东省实验中学高三阶段练习）已知椭圆的左右焦点分别为*F1*，*F2*，左顶点为*A*，且满足，椭圆上的点到焦点距离的最大值为．

(1)求椭圆的标准方程；

(2)若*P*是椭圆上的任意一点，求的取值范围；

(3)已知直线与椭圆相交于不同的两点*M*，*N*(均不是长轴的端点)，*AH*⊥*MN*，垂足为*H*且，求证：直线*l*恒过定点．

【答案】(1)(2)(3)证明见解析

(1)

由已知，解得，，则，

故椭圆的标准方程为．

(2)

设，则，又，．

∴．

由于在椭圆上，∴．

由在区间上单调递增，可知

当时，取最小值为0；当时，取最大值为12．

故的取值范围是

(3)

由消去得：．

设，，则，

 ，   ．

由得．

，即，

可得，则，

即



化简得．

∴或，均适合．

当时，直线过，舍去；

当时，直线过定点．

故直线*l*恒过定点.

**【反思】在本题第（3）问中，由，即，**

**可得，符合可以使用的二级结论：对于椭圆()上异于右顶点的两动点,,以为直径的圆经过右顶点,则直线过定点.同理,当以为直径的圆过左顶点时,直线过定点.即l过定点，即,注意，本题作为解答题，不可以直接使用该结论，但是可以用该二级结论试探答案，做到心中有数.**

**三、针对训练 举一反三**

1．已知双曲线，点，在双曲线上任取两点、满足，则直线恒过定点\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

【答案】

【解析】设的方程为,则由.

设,则是该方程的两根,∴,.

又,,故，∴,又,,

∴,代入,得：



整理得：,∴,∴或.

当时,过与题意不符,故舍去。当时,过定点.故答案为：

2．（2022·四川巴中·一模（文））已知椭圆*C*：（*a*>*b*>0）的左､右焦点分别为，，点满足，且的面积为.

(1)求椭圆*C*的方程；

(2)设椭圆*C*的上顶点为*P*，不过点*P*的直线*l*交*C*于*A*，*B*两点，若，证明直线*l*恒过定点.

【答案】(1)(2)证明见解析.

(1)由,则，所以

又，则点在椭圆上

所以，又

联立解得

所以椭圆*C*的方程；

(2)由题意，根据条件直线的斜率必存在

设直线的方程为，

由 ，得

所以

 （\*）

由，则











所以，即，即或（舍）

将代入（\*）成立.

所以直线的方程为，

所以直线恒过点

3．（2022·全国·高三专题练习）已知椭圆的左右顶点分别为*A*，*B*，点*P*为椭圆上异于*A*，*B*的任意一点．

(1)证明：直线*PA*与直线*PB*的斜率乘积为定值；

(2)设，过点*Q*作与轴不重合的任意直线交椭圆*E*于*M*，*N*两点．问：是否存在实数，使得以*MN*为直径的圆恒过定点*B*？若存在，求出的值；若不存在，请说明理由．

【答案】(1)证明见解析(2)存在；

(1)；设，且，则

所以

(2)设，直线*MN*的方程为；

联立及，得，

所以，（\*）

若以*MN*为直径的圆过点*B*，则，即

将带入整理得；

带入（\*），化简整理得5，解得，或（舍）

，满足，故存在，使得以*MN*为直径的圆过恒过定点*B*；

4．（2021·天津市静海区第六中学高三阶段练习）已知椭圆的离心率是，一个顶点是.

（1）求椭圆*C*的标准方程

（2）设*P*，*Q*是椭圆上异于顶点的任意两点，且，求证：直线*PQ*恒过定点.

【答案】（1）；（2）证明见解析.

【详解】

（1）椭圆焦点在轴上，所以，解得，

所以椭圆方程为.

（2）依题意可知，直线的斜率存在，设直线的方程为，设，

由消去并化简得，

则①，

，即.

因为，且直线的斜率均存在，

所以，整理得②，

因为，

所以，，代入②整理得：

，

将①代入上式并化简得，解得或（舍去），

使成立.

所以直线恒过定点.

5．（2021·黑龙江·鹤岗一中高二期中）已知抛物线为上一点且纵坐标为轴于点，且，其中点为拋物线的焦点.

（1）求抛物线的方程；

（2）已知为坐标原点，是抛物线上不同的两点，且满足，证明直线恒过定点，并求出定点的坐标.

【答案】（1）；（2）证明见解析，定点.

【详解】

（1）设，

根据抛物线的定义可得，，

又轴于点，则，

∵，∴，则，

∴，∵在抛物线上，将点代入抛物线方程，

∴，解得，故抛物线的方程为.

（2）依题意可知直线与轴不平行.

设直线为，，，

联立直线与抛物线，化简整理可得，

由韦达定理可得，，，

∵，

∴

，

∴或（舍去），

故直线恒过定点.

6．（2021·全国·模拟预测（理））已知为椭圆()与直线的两个交点，且，椭圆*E*的离心率是方程的一个根.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）过椭圆的右顶点作斜率存在的两条射线，交椭圆于两点，且，问：直线是否恒过定点？若经过，求出这个定点坐标；若不经过，请说明理由.

【答案】（1）；（2）过定点，定点的坐标为.

【详解】

（1）解方程得或.

因为椭圆*E*的离心率是方程的一个根，且其离心率

所以,即，

所以，所以，

所以()可化为，

整理得.

联立方程消去得，

整理得，则，解得，

所以，

所以.

因为，所以，所以，

所以，所以椭圆的标准方程为.

（2）当直线的斜率存在时，设，

联立整理得，

，，

因为，所以，

所以，

所以，

所以，

整理得，

所以或，

当时，，恒过(3，0)，此时重合，舍去；

当时，，恒过点，

当直线的斜率不存在时，轴，经计算可知此时直线也过点，

所以直线恒过定点，该定点的坐标为.

7．（2021·江西赣州·二模（文））已知椭圆的标准方程为，椭圆上的点到其两焦点的距离之和为．

（1）求椭圆的标准方程；

（2）若椭圆的上顶点，、为椭圆上不同于点的两点，且满足直线、的斜率之积为，证明：直线恒过定点，并求定点的坐标．

【答案】（1）；（2）证明见解析；定点．

【详解】

（1）由椭圆的定义可得，，

将点代入椭圆方程得，解得，

故椭圆的标准方程为；

（2）由题意得.

①当直线的斜率不存在时，设、，

所以，，所以，

又，所以，不合乎题意；

②当直线的斜率存在时，设直线为，设、，

联立，得，

，

所以，

，

即，

即，

整理得，解得或（舍去）.

所以直线的方程为，即直线过定点.

【点睛】

方法点睛：求解直线过定点问题常用方法如下：

（1）“特殊探路，一般证明”：即先通过特殊情况确定定点，再转化为有方向、有目的的一般性证明；

（2）“一般推理，特殊求解”：即设出定点坐标，根据题设条件选择参数，建立一个直线系或曲线的方程，再根据参数的任意性得到一个关于定点坐标的方程组，以这个方程组的解为坐标的点即为所求点；

（3）求证直线过定点，常利用直线的点斜式方程或截距式来证明.

8．（2021·全国·高三专题练习）已知等轴双曲线的顶点，分别是椭圆的左、右焦点，且是椭圆与双曲线某个交点的横坐标．

（1）求椭圆的方程；

（2）设直线与椭圆相交于，两点，以线段为直径的圆过椭圆的上顶点，求证：直线恒过定点．

【答案】（1）；（2）证明见解析．

【解析】

【分析】

（1）由双曲线和椭圆，，之间的等量关系求出椭圆方程；（2）设直线：，将直线方程和椭圆方程联立，根据韦达定理及，求出的值，从而证得直线恒过定点．

【详解】

解：（1）由已知可得双曲线方程为．

∵，∴交点为．

设椭圆的方程为，

代入，得，

∴椭圆的方程为．

（2）证明：显然直线与轴不垂直．

设直线：与椭圆：相交于，，

由得，

∴，．

∵，∴，

即，

，

∴，

整理得，

即．

∵，，

整理得，∴，

∴直线恒过定点．